Integralverfahren zur Erstellung der Temperaturfunktionen in einer zylindrischen Hohlsäule und ihrer Umgebung

Gerhard Herres, 2025-02-24

> *restart* :

T1 ist die Temperaturverteilung in der zylindrischen, hohlen Säule, T2 ist die Temperaturverteilung im Bereich der Wärme abgebenden Behälter, T3 ist die Temperaturverteilung um die Säule herum.
In der ringförmigen, hohlen Säule wird Wärme homogen freigesetzt. W1=Qges/V = 1.053 W/m³. S.u.
Radius der Säule ist ri = 9.7 m, Rs0 = ri + 80 m = 89.7, Neigung der Bohrungen 10°, Höhe 800 m.

> $ri := 9.7;\ Rs := evalf\left(ri + 80\cdot\cos\left(\frac{10}{180}\cdot \mathrm{Pi}\right)\right);\ H := 800;$

$$ri := 9.7$$
$$Rs := 88.48462024$$
$$H := 800 \quad \textbf{(1)}$$

Es werden 2030 Ebenen mit jeweils 90 Bohrlöchern gebohrt. In die Bohrlöcher werden jeweils 26 Behälter eingeführt, die im Zentrum in grösserem Abstand liegen und zum Aussenrand immer dichter zusammen liegen, so dass die Wärmebelastung pro m³ gleich ist.
Bei äquidistanten Abständen wäre es in der Mitte noch heißer und die maximale Temperatur wäre zu hoch.

> $Qges := 90\cdot 26\cdot 2030\cdot 4.31;\ V := evalf\left(\mathrm{Pi}\cdot\left(Rs^2 - ri^2\right)\cdot 800\right);$

$$Qges := 2.047336200\ 10^7$$
$$V := 1.944127620\ 10^7 \quad \textbf{(2)}$$

> $W1 := \frac{Qges}{V};\ \#\frac{W}{m3}$

$$W1 := 1.053087348 \quad \textbf{(3)}$$

>

> $T1 := \mathrm{c0};\ \mathrm{T2} := c0 - c2\cdot(r - ri)^2;\ T3 := c3\cdot(r - r0)^2;$

$$T1 := c0$$
$$T2 := c0 - c2\ (r - 9.7)^2$$
$$T3 := c3\ (r - r0)^2 \quad \textbf{(4)}$$

Grenzbedingungen: 1. T2(Rs,t) = T3(Rs,t) , 2. diff(T2(r,t),r) = diff(T3(r,t),r) bei r=Rs=9.7+29*cos (10°) = 38.259 m

> $eq1 := subs(r = Rs, T2) = subs(r = Rs, T3);$

$$eq1 := c0 - 6207.016386\ c2 = c3\ (88.48462024 - r0)^2 \quad \textbf{(5)}$$

> $eq2 := subs(r = Rs, diff(T2, r)) = subs(r = Rs, diff(T3, r));$

$$eq2 := -157.5692405\ c2 = 2\ c3\ (88.48462024 - r0) \quad \textbf{(6)}$$

> $Loes2u3 := solve(\{eq1, eq2\}, \{c2, c3\});$

$$Loes2u3 := \left\{c2 = \frac{5.000000000\ 10^{13}\ c0}{3.939231012\ 10^{15}\ r0 - 3.821054088\ 10^{16}},\ c3\right. \quad \textbf{(7)}$$

$$= \frac{4.924038766\ 10^{22}\ c0}{4.226306499\ 10^{25} - 4.834648763\ 10^{24}\ r0 + 4.924038766\ 10^{22}\ r0^2}\Bigg\}$$

> $C2 := rhs(Loes2u3[1]);\ C3 := normal(rhs(\text{Loes2u3}[2]));$

$$C2 := \frac{5.000000000\ 10^{13}\ c0}{3.939231012\ 10^{15}\ r0 - 3.821054088\ 10^{16}}$$

$$C3 := \frac{4.924038766\ 10^{22}\ c0}{4.226306499\ 10^{25} - 4.834648763\ 10^{24}\ r0 + 4.924038766\ 10^{22}\ r0^2} \quad \textbf{(8)}$$

>

> $T2 := subs(c2 = C2, T2);\ T3 := subs(c3 = C3, T3);$

$$T2 := c0 - \frac{5.000000000\ 10^{13}\ c0\ (r - 9.7)^2}{3.939231012\ 10^{15}\ r0 - 3.821054088\ 10^{16}}$$

$$T3 := \frac{4.924038766\ 10^{22}\ c0\ (r - r0)^2}{4.226306499\ 10^{25} - 4.834648763\ 10^{24}\ r0 + 4.924038766\ 10^{22}\ r0^2} \quad \textbf{(9)}$$

>

> $Tg := piecewise(0 < r < \text{ri}, \text{T1}, \text{ri} < \text{r} < \text{Rs}, \text{T2}, \text{Rs} < \text{r} < \text{r0}, T3, r > r0, 0);$

$$Tg := \begin{cases} c0 & 0 < r \textbf{ and } r < 9.7 \\ c0 - \dfrac{5.000000000\ 10^{13}\ c0\ (r - 9.7)^2}{3.939231012\ 10^{15}\ r0 - 3.821054088\ 10^{16}} & 9.7 < r \textbf{ and } r < 88.48462024 \\ \dfrac{4.924038766\ 10^{22}\ c0\ (r - r0)^2}{4.226306499\ 10^{25} - 4.834648763\ 10^{24}\ r0 + 4.924038766\ 10^{22}\ r0^2} & 88.48462024 < r \textbf{ and } r < r0 \\ 0 & r0 < r \end{cases}$$

Die Wärmefreisetzung ist nicht ganz homogen, da die Behälter in strahlenförmig von der zentralen Säule
ausgehenden Bohrungen eingefüllt werden. Bei r = ri = 9.7 m liegen sie enger zusammen als bei r = Rs = 21.7 m.
Q0=pi*H*(Rs^2-ri^2)*21.61 W/m³

> $Q0 := evalf(\text{Pi} * H * (Rs\text{^}2 - ri\text{^}2) * \text{W1});\ \#\ W$

$$Q0 := 2.047336200\ 10^7 \quad \textbf{(11)}$$

> $b := 4.58849845\text{e}-10;\ \text{lambda} := 5.6;\ \text{rho} := 2200;\ cp := 1200;$

$$b := 4.58849845\ 10^{-10}$$

$$\lambda := 5.6$$

$$\rho := 2200$$

$$cp := 1200 \quad \textbf{(12)}$$

> $W1;\ \#\ \frac{W}{m3}$

$$1.053087348 \quad \textbf{(13)}$$

>

Die Abstände der Behälter in den Bohrungen sind nicht äquidistant, sondern beginnen
nahe am Zentrum mit 2.47 m und enden am Aussenrand mit 0.7 m. Da die freigesetzte Wärme

näher am Zentrum nicht so leicht abgeleitet werden kann wird dort die Temperatur vermutlich höher sein, als in diesem Modell berechnet.Der Temperaturverlauf ist dann keine Parabel. Außerdem fließt am Anfang Wärme nach innen in die wieder mit Salzgrus aufgefüllte zentrale Säule. Wegen der geringeren Dichte wird die Wärmeleitfähigkeit kleiner sein, aber die Temperatur ist nicht sofort 200 K über der Umgebungstemperatur.

>

Abfliessende Wärme bei r=Rs nach außen.

> $Qab := \mathrm{Q0}\cdot\exp(-b\cdot t) = -2\cdot\mathrm{Pi}\cdot Rs\cdot H\cdot\mathrm{lambda}\cdot subs(r=Rs, diff(T2, r));$

$$Qab := 2.047336200\ 10^{7}\ e^{-4.58849845\ 10^{-10}\,t} = \frac{6.246219574\ 10^{21}\ \pi\ c0}{3.939231012\ 10^{15}\ r0 - 3.821054088\ 10^{16}} \quad (14)$$

Abfliessende Wärme nach innen bei r=ri.

> $\mathrm{Qinn} := -2\cdot\mathrm{Pi}\cdot ri\cdot H\cdot\mathrm{lambda}\cdot subs(r=ri, diff(T2, r));$

$$Qinn := 0. \quad (15)$$

Dieses Ergebnis ist ein Artefakt, da die Temperaturfunktion im Inneren konstant auf co gesetzt ist und deshalb T2 bei r = ri eine horizontale Tangente hat. Die Temperatur im Zentrum wird dadurch überschätzt, denn am Anfang fließt Wärme in die Salzschüttung des großen Bohrlochs und kühlt so die Zone direkt um das Bohrloch herum.

Gesamte Wärme

Randbedingung: Integral über beide Bereiche bis zu r=r0 muss gleich sein der insgesamt freigesetzten Wärmemenge.

> $eq3 := H\cdot\mathrm{rho}\cdot cp\cdot(int(T1\cdot 2\cdot\mathrm{Pi}\cdot r, r=0..ri) + int(\mathrm{T2}\cdot 2\cdot\mathrm{Pi}\cdot \mathrm{r}, \mathrm{r}=\mathrm{ri}..\mathrm{Rs}) + int(\mathrm{T3}\cdot 2\cdot\mathrm{Pi}\cdot \mathrm{r}, \mathrm{r}=\mathrm{Rs}..r0)) = \mathrm{Qges}\cdot int(\exp(-b\cdot t), t=0..t0);$

$$eq3 := 5.194926040\ 10^{13}\ c0 - \frac{7.439821034\ 10^{30}\ c0}{3.939231012\ 10^{15}\ r0 - 3.821054088\ 10^{16}} + \frac{1.633560616\ 10^{32}\ c0\ (r0^4 - 6.130150893\ 10^{7})}{4.226306499\ 10^{25} - 4.834648763\ 10^{24}\ r0 + 4.924038766\ 10^{22}\ r0^2} - \frac{4.356161642\ 10^{32}\ c0\ r0\ (r0^3 - 6.927928128\ 10^{5})}{4.226306499\ 10^{25} - 4.834648763\ 10^{24}\ r0 + 4.924038766\ 10^{22}\ r0^2} + \frac{3.267121231\ 10^{32}\ c0\ r0^2\ (r0^2 - 7829.528014)}{4.226306499\ 10^{25} - 4.834648763\ 10^{24}\ r0 + 4.924038766\ 10^{22}\ r0^2} = 4.461887090\ 10^{16} - 4.461887090\ 10^{16}\ e^{-4.588498450\ 10^{-10}\,t0} \quad (16)$$

> $eq3 := normal(lhs(eq3)) = rhs(eq3);$

$$eq3 := (c0\ (1.617742380\ 10^{41}\ r0 - 8.343772425\ 10^{39}\ r0^2 + 5.000000000\ 10^{29}\ r0^3 - 7.841445650\ 10^{41} + 1.072495440\ 10^{34}\ r0^5 - 1.040320580\ 10^{35}\ r0^4)) / ((2.113153250\ 10^{12} - 2.417324382\ 10^{11}\ r0 + 2.462019383\ 10^{9}\ r0^2)\ (3.939231012\ 10^{15}\ r0 - 3.821054088\ 10^{16})) = 4.461887090\ 10^{16} - 4.461887090\ 10^{16}\ e^{-4.588498450\ 10^{-10}\,t0} \quad (17)$$

> $C0 := solve(Qab, c0);$

$$C0 := 1.251997011\ 10^{-8}\ e^{-4.588498450\ 10^{-10}\,t}\ (3.28269251\ 10^{8}\ r0 - 3.184211740\ 10^{9}) \quad (18)$$

> $eq3a := subs(c0=C0, t0=t, eq3);$

$$eq3a := (1.251997011\ 10^{-8}\ e^{-4.588498450\ 10^{-10}\,t}\ (3.28269251\ 10^{8}\ r0 \quad (19)$$

$$-3.184211740\ 10^{9})\ (1.617742380\ 10^{41}\ r0 - 8.343772425\ 10^{39}\ r0^{2} + 5.000000000\ 10^{29}\ r0^{3} - 7.841445650\ 10^{41} + 1.072495440\ 10^{34}\ r0^{5} - 1.040320580\ 10^{35}\ r0^{4})) \Big/ ((2.113153250\ 10^{12} - 2.417324382\ 10^{11}\ r0 + 2.462019383\ 10^{9}\ r0^{2})\ (3.939231012\ 10^{15}\ r0 - 3.821054088\ 10^{16})) = 4.461887090\ 10^{16} - 4.461887090\ 10^{16}\ e^{-4.588498450\ 10^{-10}\ t}$$

> $eq3b := normal(lhs(eq3a) - rhs(eq3a));$

$$eq3b := (-4.568788014\ 10^{43}\ e^{-4.588498450\ 10^{-10}\ t}\ r0^{2} + 3.984422260\ 10^{41}\ e^{-4.588498450\ 10^{-10}\ t}\ r0^{3} + 4.147368610\ 10^{36}\ e^{-4.588498450\ 10^{-10}\ t}\ r0^{4} + 7.738765891\ 10^{44}\ e^{-4.588498450\ 10^{-10}\ t}\ r0 + 4.407871757\ 10^{34}\ e^{-4.588498450\ 10^{-10}\ t}\ r0^{6} - 8.551271229\ 10^{35}\ e^{-4.588498450\ 10^{-10}\ t}\ r0^{5} - 3.571477731\ 10^{45}\ e^{-4.588498450\ 10^{-10}\ t} - 7.835486914\ 10^{44}\ r0 + 3.602738623\ 10^{45} + 4.668539431\ 10^{43}\ r0^{2} - 4.327344733\ 10^{41}\ r0^{3}) \Big/ ((2.113153250\ 10^{12} - 2.417324382\ 10^{11}\ r0 + 2.462019383\ 10^{9}\ r0^{2})\ (3.939231012\ 10^{15}\ r0 - 3.821054088\ 10^{16})) \quad \textbf{(20)}$$

> $tg := solve(eq3b, t);$

$$tg := -2.179362183\ 10^{9} \ln((1.0000000\ 10^{7}\ (7.835486914\ 10^{12}\ r0 - 3.602738623\ 10^{13} - 4.668539431\ 10^{11}\ r0^{2} + 4.327344733\ 10^{9}\ r0^{3})) \Big/ (-4.568788014\ 10^{18}\ r0^{2} + 3.984422260\ 10^{16}\ r0^{3} + 4.147368610\ 10^{11}\ r0^{4} + 7.738765891\ 10^{19}\ r0 + 4.407871757\ 10^{9}\ r0^{6} - 8.551271229\ 10^{10}\ r0^{5} - 3.571477731\ 10^{20})) \quad \textbf{(21)}$$

tg ist die Zeit *bis die Wärme r0 erreicht.*

> $C0g := evalf(simplify(subs(t = tg, C0)));$

$$C0g := 0.1251997010\ ((7.835486914\ 10^{12}\ r0 - 3.602738623\ 10^{13} - 4.668539431\ 10^{11}\ r0^{2} + 4.327344733\ 10^{9}\ r0^{3}) \Big/ (-4.568788014\ 10^{18}\ r0^{2} + 3.984422260\ 10^{16}\ r0^{3} + 4.147368610\ 10^{11}\ r0^{4} + 7.738765891\ 10^{19}\ r0 + 4.407871757\ 10^{9}\ r0^{6} - 8.551271229\ 10^{10}\ r0^{5} - 3.571477731\ 10^{20}))^{\frac{9999999999}{10000000000}}\ (3.28269251\ 10^{8}\ r0 - 3.184211740\ 10^{9}) \quad \textbf{(22)}$$

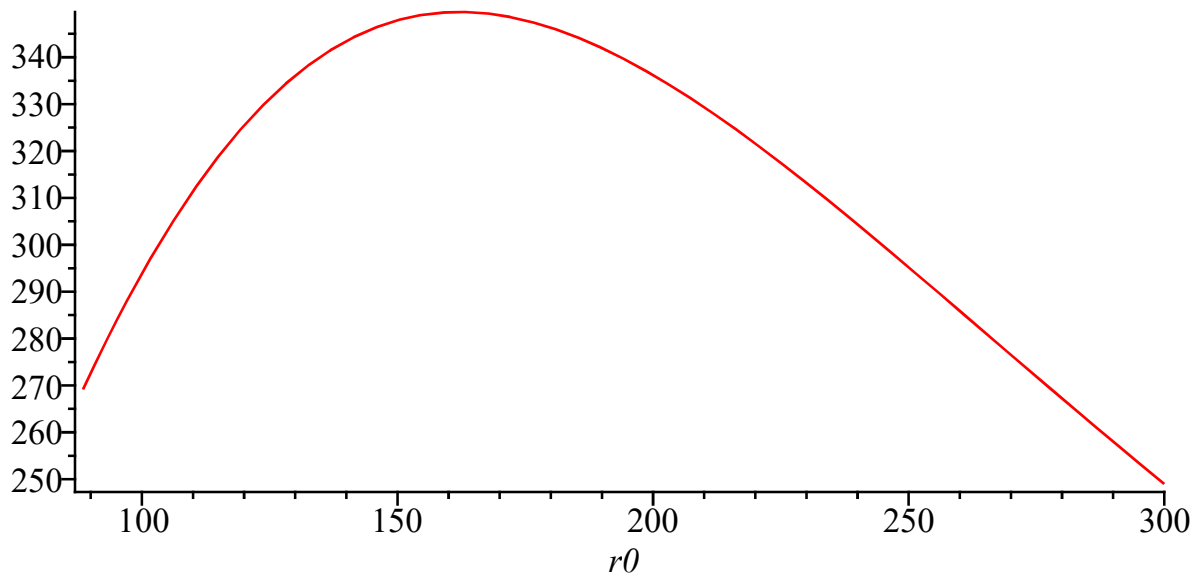
C0g ist die maximale Temperatur in der Mitte der Säule, wenn die Wärme r0 erreicht hat.

> $C0g := normal(0.1251997010\ ((7.835486914\ 10^{12}\ r0 - 3.602738623\ 10^{13} - 4.668539431\ 10^{11}\ r0^{2} + 4.327344733\ 10^{9}\ r0^{3}) \Big/ (-4.568788014\ 10^{18}\ r0^{2} + 3.984422260\ 10^{16}\ r0^{3} + 4.147368610\ 10^{11}\ r0^{4} + 7.738765891\ 10^{19}\ r0 + 4.407871757\ 10^{9}\ r0^{6} - 8.551271229\ 10^{10}\ r0^{5} - 3.571477731\ 10^{20}))\ (3.28269251\ 10^{8}\ r0 - 3.184211740\ 10^{9}));$

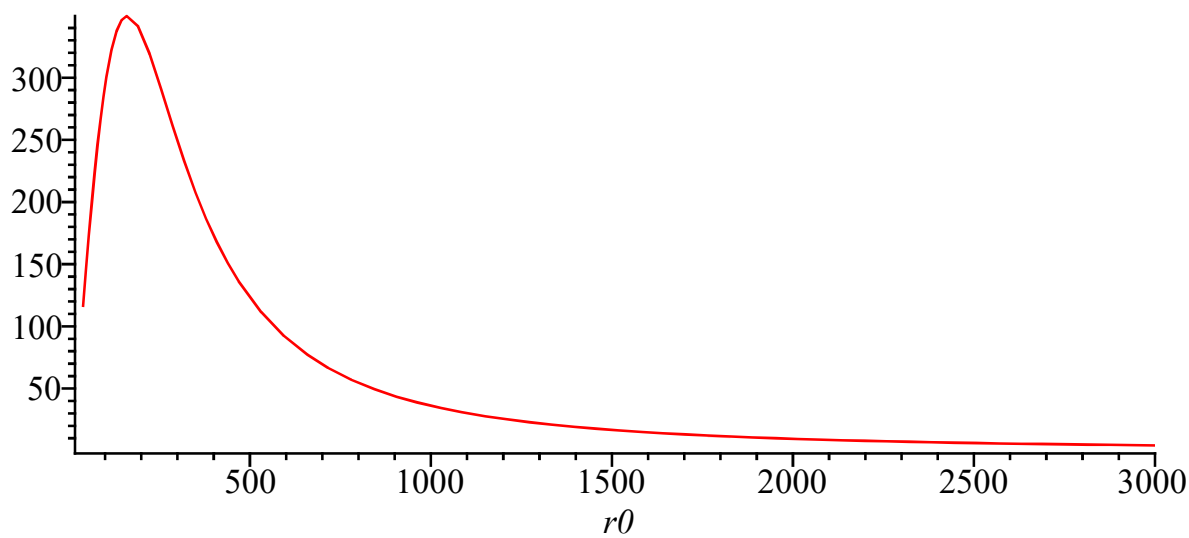
$$C0g := (0.1251997010\ (3.28269251\ 10^{8}\ r0 - 3.184211740\ 10^{9})\ (7.835486914\ 10^{12}\ r0 - 3.602738623\ 10^{13} - 4.668539431\ 10^{11}\ r0^{2} + 4.327344733\ 10^{9}\ r0^{3})) \Big/ (\quad \textbf{(23)}$$

$$-4.568788014\ 10^{18}\ r0^2 + 3.984422260\ 10^{16}\ r0^3 + 4.147368610\ 10^{11}\ r0^4 + 7.738765891\ 10^{19}\ r0 + 4.407871757\ 10^{9}\ r0^6 - 8.551271229\ 10^{10}\ r0^5 - 3.571477731\ 10^{20})$$

> $plot(C0g, r0 = Rs + 0.001 ..300);$



> $plot(C0g, r0 = 39 ..3000);$



> $r0gmax := solve(diff(C0g, r0) = 0, r0);$

$$r0gmax := 162.1405572, 9.699721529 + 0.00006098117898\ I, 9.700278517 + 0.00006098575636\ I, 88.48462013 + 0.001266170199\ I, -95.91643355 + 145.0711029\ I, -95.91643355 - 145.0711029\ I, 88.48462013 - 0.001266170199\ I, 9.700278517 - 0.00006098575636\ I, 9.699721529 - 0.00006098117898\ I \quad \textbf{(24)}$$

> $R0gmax := r0gmax[1];$

$$R0gmax := 162.1405572 \quad \textbf{(25)}$$

Bei r0 = 162.14 m ist die Temperatur in der Mitte maximal.

> $C0gmax := subs(r0 = R0gmax, C0g);$

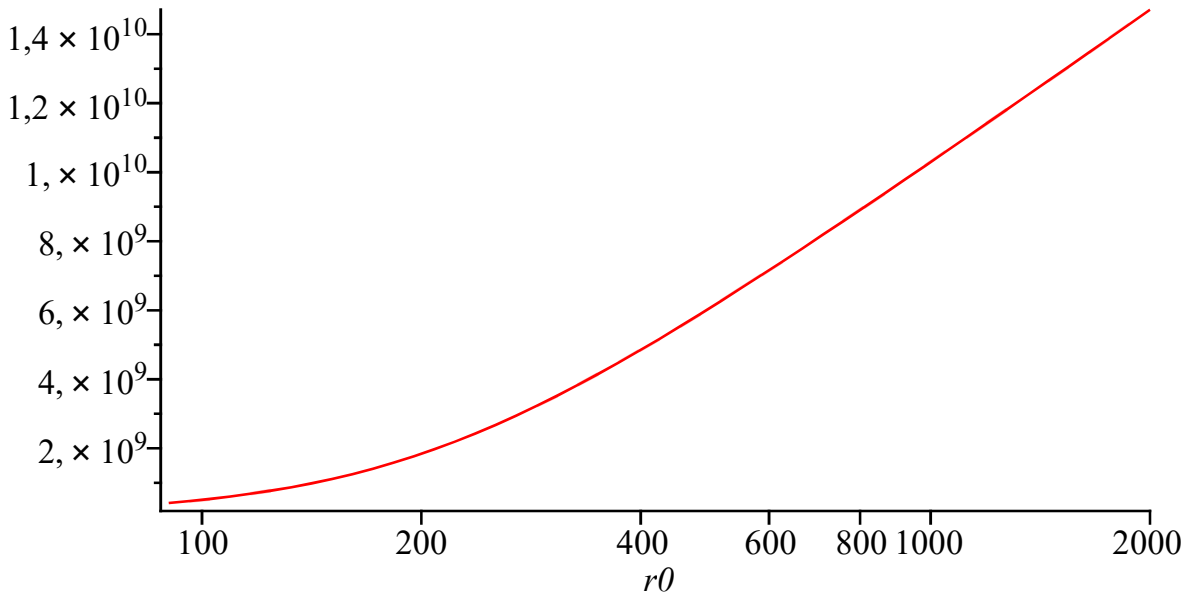
$$C0gmax := 349.6632284 \quad \textbf{(26)}$$

> $TG := evalf(\ subs(r0 = R0gmax, tg)\ );$

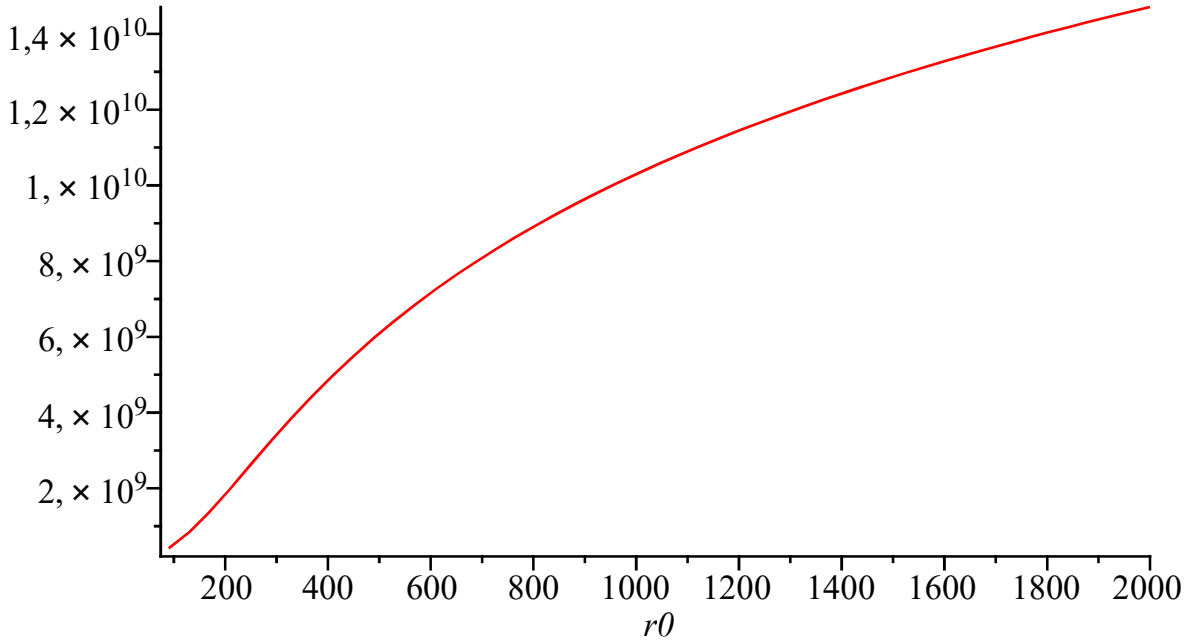
$$TG := 1.271021683\ 10^{9} \quad \textbf{(27)}$$

> $with(plots)\ :$

> $semilogplot(\mathrm{tg}, \mathrm{r0} = 90\ ..2000);$



> $plot(\mathrm{tg}, \mathrm{r0} = 90\ ..2000);$



> $TGMAX := \dfrac{TG}{(3600 \cdot 24 \cdot 365.25)};$

$$TGMAX := 40.27624670 \quad \textbf{(28)}$$

Die maximale Temperatur tritt nach $1.271021683\ 10^{9}$ Sekunden = 40.2762 Jahren ein und beträgt 349.66 K über der Anfangstemperatur. Die Wärme ist dann bis r0=162m vorgedrungen.

> $with(plots);$

[*animate*, *animate3d*, *animatecurve*, *arrow*, *changecoords*, *complexplot*, *complexplot3d*, **(29)**

conformal, *conformal3d*, *contourplot*, *contourplot3d*, *coordplot*, *coordplot3d*, *densityplot*, *display*, *dualaxisplot*, *fieldplot*, *fieldplot3d*, *gradplot*, *gradplot3d*, *graphplot3d*, *implicitplot*, *implicitplot3d*, *inequal*, *interactive*, *interactiveparams*, *intersectplot*, *listcontplot*, *listcontplot3d*, *listdensityplot*, *listplot*, *listplot3d*, *loglogplot*, *logplot*, *matrixplot*, *multiple*, *odeplot*, *pareto*, *plotcompare*, *pointplot*, *pointplot3d*, *polarplot*, *polygonplot*, *polygonplot3d*, *polyhedra_supported*, *polyhedraplot*, *rootlocus*, *semilogplot*, *setcolors*, *setoptions*, *setoptions3d*, *spacecurve*, *sparsematrixplot*, *surfdata*, *textplot*, *textplot3d*, *tubeplot*]

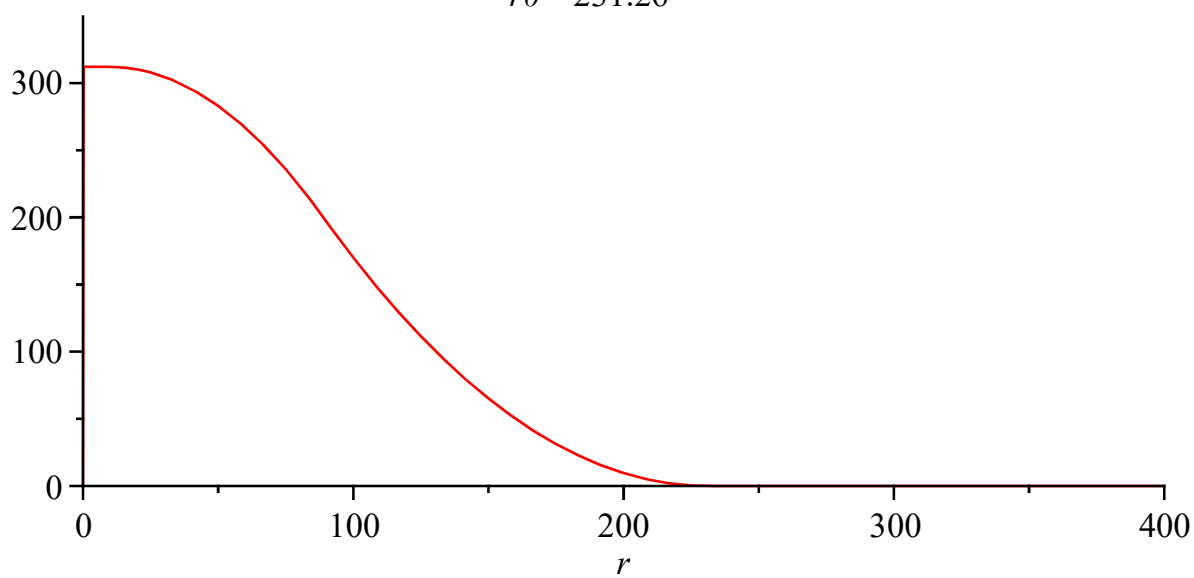
```
> Tg0 := subs(c0 = C0g, Tg);
```

$$Tg0 := \left\{ \frac{0.1251997010\,(3.28269251\,10^{8}\,r0 - 3.184211740\,10^{9})\,(7.835486914\,10^{12}\,r0 - 3.602738623}{-4.568788014\,10^{18}\,r0^{2} + 3.984422260\,10^{16}\,r0^{3} + 4.147368610\,10^{11}\,r0^{4} + 7.738765891\,10^{19}\,r0 + 4.40} \right.$$

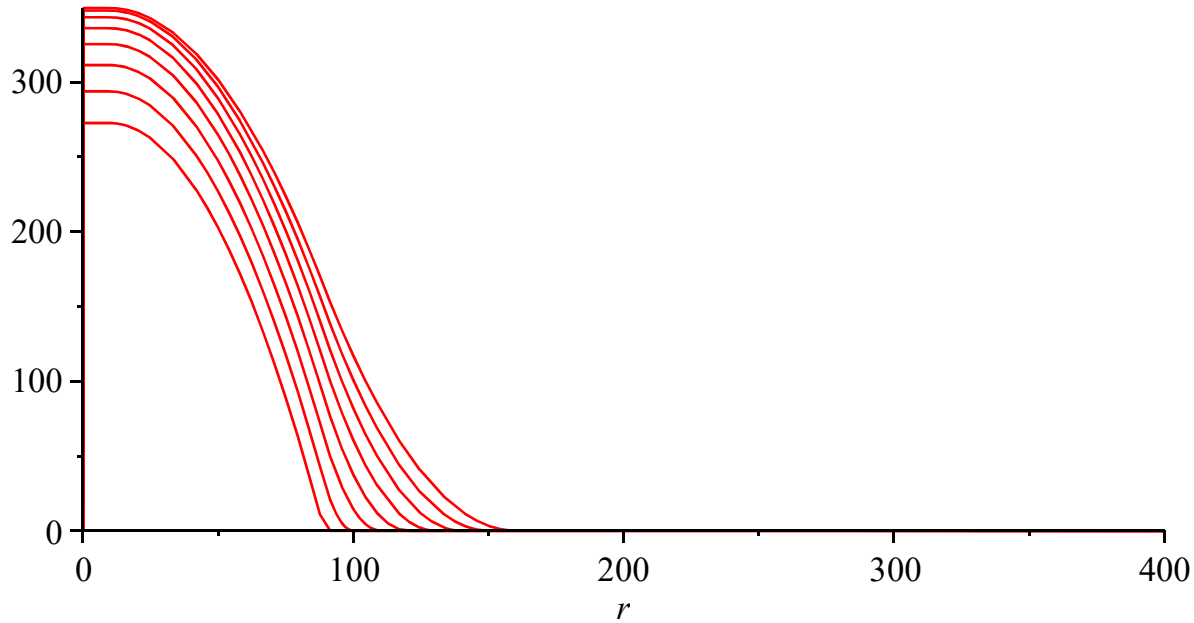
$$\overline{(-4.568788014\,10^{18}\,r0^{2} + 3.9}$$

```
> animate( plot , [Tg0, r = 0 ..400] , r0 = Rs..400);
```

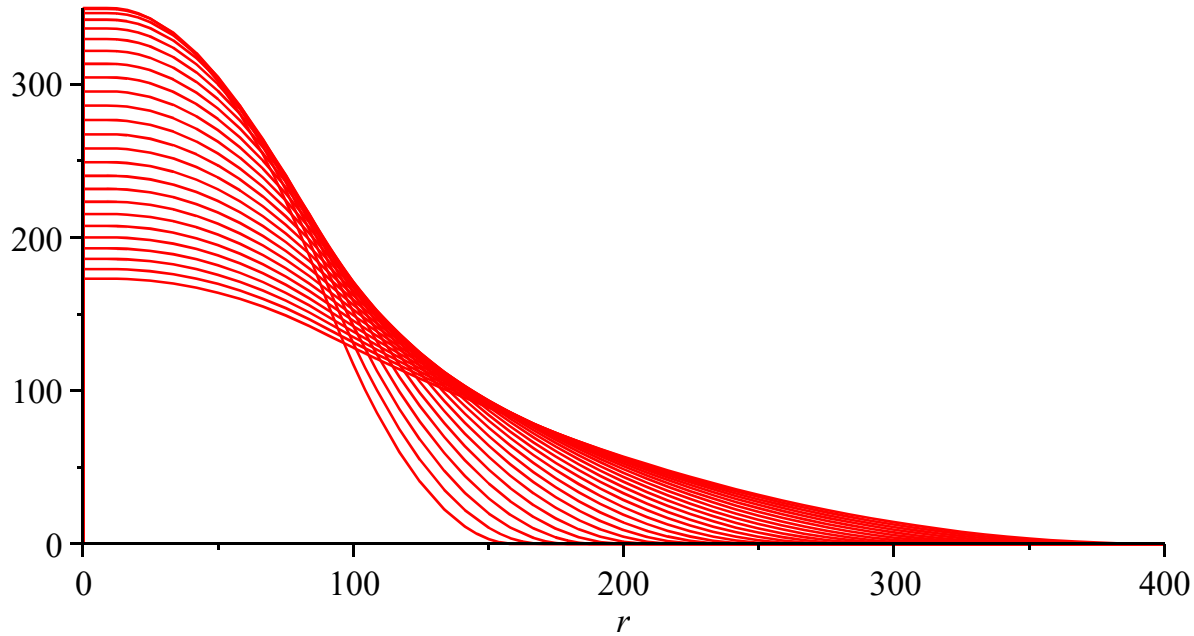
$r0 = 231.26$



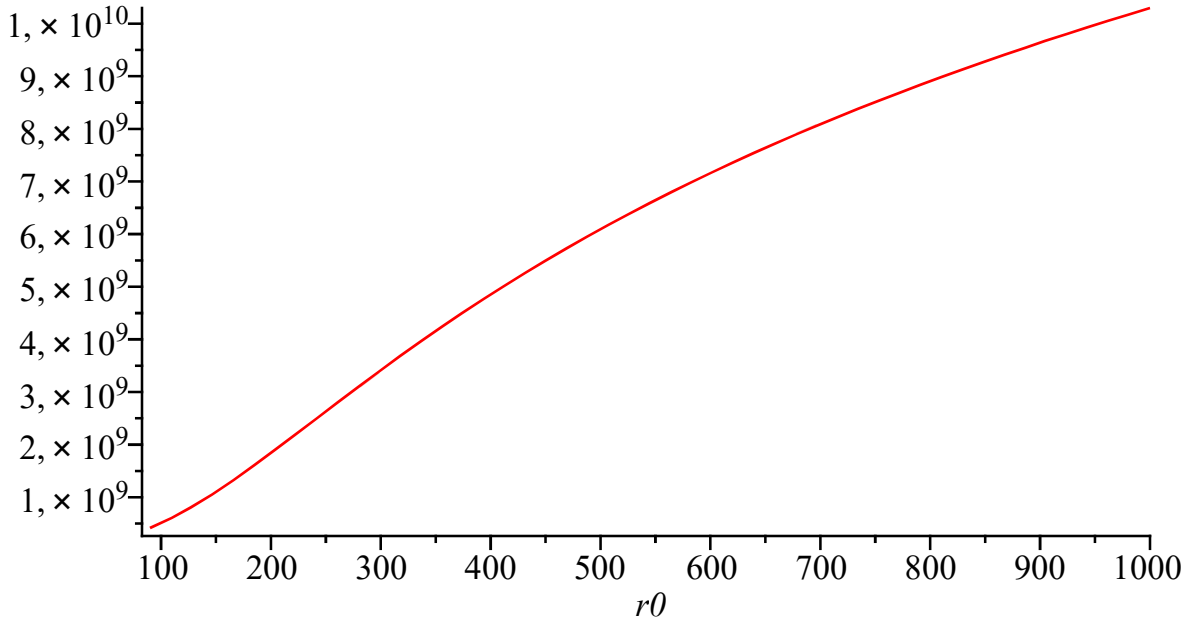

```
> for k from 90 by 10 to 400 do
  p[k] := plot(subs(r0 = k, Tg0), r = 0 ..400) :
  end do:
> display( p[90], p[100], p[110], p[120], p[130], p[140], p[150], p[160]);
```



> $display(p[160], p[170], p[180], p[190], p[200], p[210], p[220], p[230], p[240], p[250], p[260], p[270], p[280], p[290], p[300], p[310], p[320], p[330], p[340], p[350], p[360], p[370], p[380], p[390], p[400]);$



> $plot(tg, r0 = 90..1000);$


1, × 10^10
9, × 10^9
8, × 10^9
7, × 10^9
6, × 10^9
5, × 10^9
4, × 10^9
3, × 10^9
2, × 10^9
1, × 10^9
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
r0

>