https://math-gpt.ai/de/calculator

Wie lautet die inverse Laplace transformierte von exp(-sqrt(s)*k)/(sqrt(s)*(s+b))

Um die inverse Laplace-Transformation von

$$F(s) = \frac{e^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(s+b)}$$

zu bestimmen, nutzen wir die Eigenschaft der Faltung oder bekannte Korrespondenzen aus der Laplace-Tabelle.

Schritt 1: Identifizierung der Komponenten

Wir können F(s) als Produkt zweier Funktionen G(s) und H(s) schreiben:

$$G(s) = \frac{e^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \quad \text{und} \quad H(s) = \frac{1}{s+b}$$

Schritt 2: Inverse Laplace-Transformation der Einzelteile

Aus den Standardtabellen der Laplace-Transformation wissen wir:

1. Für $G(s) = \frac{e^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-k\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$$

Nennen wir dies $g(t)$.

2. Für $H(s) = \frac{1}{s+b}$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+b}\right\} = e^{-bt}$$

Nennen wir dies $h(t)$.

Schritt 3: Anwendung des Faltungssatzes

Der Faltungssatz besagt: $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)H(s)\} = (g * h)(t) = \int_0^t g(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$.

Setzen wir unsere Funktionen ein:

$$f(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{k^2}{4\tau}} \cdot e^{-b(t-\tau)}\,d\tau$$

Ziehen wir die Konstante e^{-bt} aus dem Integral:

$$f(t) = \frac{e^{-bt}}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau^{-1/2} e^{-\frac{k^2}{4\tau}+b\tau}\,d\tau$$

Schritt 4: Lösung des Integrals

Um dieses Integral zu lösen, führt man eine Substitution durch (typischerweise $u=\sqrt{(\tau)}$ oder

$$u = \frac{k}{2\sqrt{\tau}} \mp \sqrt{b\tau}).$$

Nach Anwendung der Standard-Integrale für diese spezifische Form erhält man das Ergebnis unter Verwendung der Fehlerfunktion erf(z) oder der komplementären Fehlerfunktion erfc(z).

Das Ergebnis lautet:

$$f(t) = \frac{e^{-bt}}{2\sqrt{b}}\left[e^{k\sqrt{b}}\mathrm{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}} + \sqrt{bt}\right) + e^{-k\sqrt{b}}\mathrm{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}} - \sqrt{bt}\right)\right]$$

(Hinweis: Für \$b=0\$ vereinfacht sich der Ausdruck, aber für \$b>0\$ ist dies die geschlossene analytische Lösung.)

Der Parameter k steht für k=x/sqrt(a).

Die gesamte Funktion $u(s,x)=\frac{q_0*\sqrt{(a)}}{\lambda}*\exp\frac{\left(\frac{-\sqrt{(s)}*x}{\sqrt{(a)}}\right)}{(\sqrt{(s)}*(s+b))}$ wird zurück transformiert zu

$$f(t,x)=\frac{(q_0*\exp(-b*t))}{(2*\sqrt{(b/a)}*\lambda)}*(\exp(y)*erfc(\xi+\sqrt{(b*t)})+\exp(-y)*erfc(\xi-\sqrt{(b*t)}))$$

mit $y=x*\sqrt{(b/a)}$ und $\xi=x/\sqrt{(4*a*t)}$