Integration der Temperatur um eine Linienquelle

Gerhard Herres, 2026-06-18

In einem Bohrloch werden Behälter mit hochradioaktivem Müll, HLW genannt, versenkt. Auf jeden Behälter der Länge 0,22 m folgen 3 gleichlange Betonzylinder. Jeder Behälter gibt zu Beginn eine Wärmeleistung Q0 = 4,31 W ab. Da die Wärmeabgabe auf Grund des radioaktiven Zerfalls mit einer exponentiellen Zerfallsrate von b = 4,588*10^-10 pro Sekunde abnimmt, klingt die Wärmeabgabe langsam ab. Nach dem Lehrbuch Wärme- und Stoffübertragung von Baehr und Stephan kann man für eine Linienquelle eine Temperaturfunktion in Abhängigkeit von Abstand r und Zeit t angeben.

> *restart* :

$$\mathrm{theta}(r,t) := \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\lambda\cdot L}\cdot Int\left(Q(\tau)\cdot(t-\tau)^{-1}\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{4\cdot a\cdot(t-\tau)}\right), d\tau=0..t\right);$$

$$\theta := (r,t)\rightarrow\frac{1}{4}\,\frac{\displaystyle\int_0^t \frac{Q(\tau)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\frac{r^2}{a\,(t-\tau)}}}{t-\tau}\,\mathrm{d}d\tau}{\pi\,\lambda\,L} \qquad \textbf{(1)}$$

Mit Q(τ)=Q0*exp(-b*τ) wird die exponentiell abnehmende Wärmeabgabe eingesetzt.

$$> \mathrm{theta}(r,t) := \frac{1}{4\cdot\pi\cdot\lambda\cdot L}\cdot Int\left(Q0\cdot\exp(-b\cdot\tau)\cdot(t-\tau)^{-1}\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{4\cdot a\cdot(t-\tau)}\right), d\tau=0..t\right);$$

$$\theta := (r,t)\rightarrow\frac{1}{4}\,\frac{\displaystyle\int_0^t \frac{Q0\,\mathrm{e}^{-b\,\tau}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\frac{r^2}{a\,(t-\tau)}}}{t-\tau}\,\mathrm{d}d\tau}{\pi\,\lambda\,L} \qquad \textbf{(2)}$$

Eine Substitution u = t - τ --> du = -dτ vereinfacht das Integral.

$$> \mathrm{theta}(r,t) := \frac{-1}{4\cdot\pi\cdot\lambda\cdot L}\cdot Int\left(Q0\cdot\exp(-b\cdot(t-u))\cdot(\mathrm{u})^{-1}\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{4\cdot a\cdot(\mathrm{u})}\right), d\mathrm{u}=\mathrm{t}..0\right);$$

$$\theta := (r,t)\rightarrow-\frac{1}{4}\,\frac{Int\left(\frac{Q0\,\mathrm{e}^{-b\,(t-u)}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\frac{r^2}{a\,u}}}{u}, d\,u=t..0\right)}{\pi\,\lambda\,L} \qquad \textbf{(3)}$$

Aus diesem Integral läßt sich der konstante Anteil Q0 * exp(-b * t) heraus ziehen.
Die Integrationsgrenzen werden vertauscht.

$$> \mathrm{theta}(r,t) := \frac{Q0\cdot\exp(-b\cdot(t))}{4\cdot\pi\cdot\lambda\cdot L}\cdot Int\left(\exp(b\cdot u)\cdot(\mathrm{u})^{-1}\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{4\cdot a\cdot(\mathrm{u})}\right), d\mathrm{u}=0..\mathrm{t}\right);$$

(4)

$$\theta := (r,t) \rightarrow \frac{1}{4}\,\frac{Q0\,\mathrm{e}^{-b\,t}\left(Int\left(\frac{\mathrm{e}^{b\,u}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\,\frac{r^2}{a\,u}}}{u}, d\,u=0..t\right)\right)}{\pi\,\lambda\,L} \quad \textbf{(4)}$$

Leider gibt es für dieses Integral keine geschlossene Lösung. Für konstante Wärmeleistung gibt es zwar als Lösung das Exponentialintegral, welches hier aber nicht zutrifft. Folglich kann man nur mit einer numerischen Integration die Funktionen erhalten.

> $Q0 := 4.31;$ # *W*

$$Q0 := 4.31 \quad \textbf{(5)}$$

> $L := 4 \cdot 0.22$ # *m Länge einer Einheit = 1 HLW Behälter und 3 Abstandshalter*

$$L := 0.88 \quad \textbf{(6)}$$

> $b := 4.588\text{e-}10;$ # $\frac{1}{Sekunde}$ *Zerfallsrate*

$$b := 4.588\ 10^{-10} \quad \textbf{(7)}$$

> $\mathrm{rho} := 2200;\ cp := 1200;$ # *Dichte in* $\frac{kg}{m3}$, *spezifische Wärmekapazität* **in** $\frac{J}{(kg \cdot K)}$

$$\rho := 2200$$
$$cp := 1200 \quad \textbf{(8)}$$

> $\mathrm{lambda} := 5.4;\ a := \frac{\mathrm{lambda}}{\mathrm{rho} \cdot cp};$ # *lambda in* $\frac{W}{(m \cdot K)}$, *a* **in** $\frac{m^2}{s}$

$$\lambda := 5.4$$
$$a := 0.000002045454546 \quad \textbf{(9)}$$

> *with(plots)* :

Der Integrand lautet:

> $ft := \exp(b \cdot \tau) \cdot (\tau)^{-1} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4 \cdot a \cdot (\tau)}\right);$

$$ft := \frac{\mathrm{e}^{4.588\ 10^{-10}\,\tau}\,\mathrm{e}^{-\frac{1.222222222\ 10^{5}\,r^2}{\tau}}}{\tau} \quad \textbf{(10)}$$

Mit dem Vorfaktor $\frac{Q0 \cdot \exp(-b \cdot t)}{\pi \cdot 4 \cdot \mathrm{lambda} \cdot L}$

> $ftg := \frac{Q0 \cdot \exp(-b \cdot t)}{\pi \cdot 4 \cdot \mathrm{lambda} \cdot L} \cdot ft;$

$$ftg := \frac{0.2267466330\,\mathrm{e}^{-4.588\ 10^{-10}\,t}\,\mathrm{e}^{4.588\ 10^{-10}\,\tau}\,\mathrm{e}^{-\frac{1.222222222\ 10^{5}\,r^2}{\tau}}}{\tau\,\pi} \quad \textbf{(11)}$$

▶ Darstellung des Integranden

Numerische Integration

Die Integration wird über jeweils eine 8tel Dekade der Zeit t durchgeführt, da dann vom Programm die Schrittweite jeweils passend gewählt werden kann.

> *ftg*

$$\frac{0.2267466330\, e^{-4.588\, 10^{-10} t}\, e^{4.588\, 10^{-10} \tau}\, e^{-\frac{1.222222222\, 10^{5} r^{2}}{\tau}}}{\tau\, \pi} \tag{2.1}$$

> $Ft := Int(ftg, \tau = 0..t, numeric = true);$

$$Ft := Int\left(\frac{0.2267466330\, e^{-4.588\, 10^{-10} t}\, e^{4.588\, 10^{-10} \tau}\, e^{-\frac{1.222222222\, 10^{5} r^{2}}{\tau}}}{\tau\, \pi}, \tau = 0..t, numeric = true\right) \tag{2.2}$$

> Die räumliche Auflösung beträgt ein 8tel Dekade, beginnend mit R = 0.01333 m. Der nächste Radius ist dann jeweils um den Faktor 10^(1/8) = 1,33352 größer.
> So kann sowohl der Bereich nahe an der Linienquelle, als auch fern davon mit geringem Aufwand berechnet werden.

> $Digits := 20 :$

```
ListR := [ ]:
 for NR from 1 to 33 do
   R := 0.01·10^(NR/8) : ListR := [op(ListR), R]: # Liste der Radien
   for N from 1 to 88 do
       Fti := 0 :                  #  Summe der Integralbeiträge auf  0 setzen.
      ftr := subs(r = R, ft) : # Integrand für den Radius r = R
      ListT := [ ]:    #   Liste der Zeitpunkte initialisieren.
      for k from 1 to N do
         T1 := 10^((k-1)/8) : T2 := 10^(k/8) : Tg := 10^(N/8) :
          ListT := [op(ListT), T2]:  #   Liste aller Zeitpunkte
          #  T1 und T2 geben das Intervall der Integration an.
          # Tg ist der Zeitpunkt bis zu dem integriert wird.
         Ft := evalf(subs(t = Tg, Q0·exp(-b·t)/(π·4·lambda·L))·int(ftr, τ = T1..T2, numeric = true)) :
          # Ft sind die Beiträge zur Integration in den Zeitintervallen T1 bis T2
         Fti := Fti + Ft :   # Fti ist das gesamte Integral bis zum Zeitpunkt Tg
      end do:
     Feld[NR, k - 1] := Fti :
   #  print(NR, k - 1, Fti);
    #  Zum Radius R = 0.01 ·10^(NR/8) gesammelte Temperaturwerte zu den Zeitpunkten Tg
      = 10^(2/8) bis Tg = 10^(77/8)
  end do:
```

```
end do:
```

```
> with(plots) :
> ListR
```

$$[0.01\ 10^{1/8}, 0.01\ 10^{1/4}, 0.01\ 10^{3/8}, 0.01\ \sqrt{10}, 0.01\ 10^{5/8}, 0.01\ 10^{3/4}, 0.01\ 10^{7/8}, 0.10, 0.10\ 10^{1/8}, 0.10\ 10^{1/4}, 0.10\ 10^{3/8}, 0.10\ \sqrt{10}, 0.10\ 10^{5/8}, 0.10\ 10^{3/4}, 0.10\ 10^{7/8}, 1.00, 1.00\ 10^{1/8}, 1.00\ 10^{1/4}, 1.00\ 10^{3/8}, 1.00\ \sqrt{10}, 1.00\ 10^{5/8}, 1.00\ 10^{3/4}, 1.00\ 10^{7/8}, 10.00, 10.00\ 10^{1/8}, 10.00\ 10^{1/4}, 10.00\ 10^{3/8}, 10.00\ \sqrt{10}, 10.00\ 10^{5/8}, 10.00\ 10^{3/4}, 10.00\ 10^{7/8}, 100.00, 100.00\ 10^{1/8}] \quad \textbf{(12)}$$

```
> ListT
```

$$[10^{1/8}, 10^{1/4}, 10^{3/8}, \sqrt{10}, 10^{5/8}, 10^{3/4}, 10^{7/8}, 10, 10\ 10^{1/8}, 10\ 10^{1/4}, 10\ 10^{3/8}, 10\ \sqrt{10}, 10\ 10^{5/8}, 10\ 10^{3/4}, 10\ 10^{7/8}, 100, 100\ 10^{1/8}, 100\ 10^{1/4}, 100\ 10^{3/8}, 100\ \sqrt{10}, 100\ 10^{5/8}, 100\ 10^{3/4}, 100\ 10^{7/8}, 1000, 1000\ 10^{1/8}, 1000\ 10^{1/4}, 1000\ 10^{3/8}, 1000\ \sqrt{10}, 1000\ 10^{5/8}, 1000\ 10^{3/4}, 1000\ 10^{7/8}, 10000, 10000\ 10^{1/8}, 10000\ 10^{1/4}, 10000\ 10^{3/8}, 10000\ \sqrt{10}, 10000\ 10^{5/8}, 10000\ 10^{3/4}, 10000\ 10^{7/8}, 100000, 100000\ 10^{1/8}, 100000\ 10^{1/4}, 100000\ 10^{3/8}, 100000\ \sqrt{10}, 100000\ 10^{5/8}, 100000\ 10^{3/4}, 100000\ 10^{7/8}, 1000000, 1000000\ 10^{1/8}, 1000000\ 10^{1/4}, 1000000\ 10^{3/8}, 1000000\ \sqrt{10}, 1000000\ 10^{5/8}, 1000000\ 10^{3/4}, 1000000\ 10^{7/8}, 10000000, 10000000\ 10^{1/8}, 10000000\ 10^{1/4}, 10000000\ 10^{3/8}, 10000000\ \sqrt{10}, 10000000\ 10^{5/8}, 10000000\ 10^{3/4}, 10000000\ 10^{7/8}, 100000000, 100000000\ 10^{1/8}, 100000000\ 10^{1/4}, 100000000\ 10^{3/8}, 100000000\ \sqrt{10}, 100000000\ 10^{5/8}, 100000000\ 10^{3/4}, 100000000\ 10^{7/8}, 1000000000, 1000000000\ 10^{1/8}, 1000000000\ 10^{1/4}, 1000000000\ 10^{3/8}, 1000000000\ \sqrt{10}, 1000000000\ 10^{5/8}, 1000000000\ 10^{3/4}, 1000000000\ 10^{7/8}, 10000000000, 10000000000\ 10^{1/8}, 10000000000\ 10^{1/4}, 10000000000\ 10^{3/8}, 10000000000\ \sqrt{10}, 10000000000\ 10^{5/8}, 10000000000\ 10^{3/4}, 10000000000\ 10^{7/8}, 100000000000] \quad \textbf{(13)}$$

```
> nops(ListR); nops(ListT);
```

$$33$$

$$88 \quad \textbf{(14)}$$

```
> evalf(0.01 10^(4/8))
```

$$0.03162277660168379320 \quad \textbf{(15)}$$

```
> for NR from 1 to 33 do
    plotfeld[NR] := [ ]:
    for k from 1 to 88 do
      plotfeld[NR] := [op(plotfeld[NR]), [ListT[k], Feld[NR, k]]]:
    end do:
  end do:
> plotfeld[1];
```

$$
\begin{gathered}
[[10^{1/8}, 3.4822955912763517063\;10^{-10}], [10^{1/4}, 2.6991186125720435214\;10^{-8}], [10^{3/8}, \\
7.4887575342422338114\;10^{-7}], [\sqrt{10}, 0.0000096194782688906470678], [10^{5/8}, \\
0.000069195493775921062502], [10^{3/4}, 0.00032138585613268938309], [10^{7/8}, \\
0.0010722019360120873572], [10, 0.0027826893226032252111], [10\;10^{1/8}, \\
0.0059638950382088077071], [10\;10^{1/4}, 0.011038734930065102724], [10\;10^{3/8}, \\
0.018249031136348988158], [10\sqrt{10}, 0.027637139561843667393], [10\;10^{5/8}, \\
0.039083620738380721353], [10\;10^{3/4}, 0.052367066352823718061], [10\;10^{7/8}, \\
0.067220490559610000156], [100, 0.083372735621517101620], [100\;10^{1/8}, \\
0.10057349408694855720], [100\;10^{1/4}, 0.11860527018904002692], [100\;10^{3/8}, \\
0.13728664715331370214], [100\sqrt{10}, 0.15647057287937154783], [100\;10^{5/8}, \\
0.17604026854512507226], [100\;10^{3/4}, 0.19590436595854600888], [100\;10^{7/8}, \\
0.21599215337846718286], [1000, 0.23624934347463233472], [1000\;10^{1/8}, \\
0.25663450531573730294], [1000\;10^{1/4}, 0.27711615841746669580], [1000\;10^{3/8}, \\
0.29767046028435410217], [1000\sqrt{10}, 0.31827939557827999390], [1000\;10^{5/8}, \\
0.33892937407471110808], [1000\;10^{3/4}, 0.35961015377999324706], [1000\;10^{7/8}, \\
0.38031401836083365760], [10000, 0.40103515102974607701], [10000\;10^{1/8}, \\
0.42176915872389599705], [10000\;10^{1/4}, 0.44251271027483170835], [10000\;10^{3/8}, \\
0.46326326024463221383], [10000\sqrt{10}, 0.48401883636578779032], [10000\;10^{5/8}, \\
0.50477787330364391836], [10000\;10^{3/4}, 0.52553907899567373390], [10000\;10^{7/8}, \\
0.54630132231012305258], [100000, 0.56706353235740680942], [100000\;10^{1/8}, \\
0.58782460057634367106], [100000\;10^{1/4}, 0.60858327674240077379], [100000\;10^{3/8}, \\
0.62933804928519839012], [100000\sqrt{10}, 0.65008699867049419179], [100000\;10^{5/8}, \\
0.67082760993482793518], [100000\;10^{3/4}, 0.69155652650457688864], [100000\;10^{7/8}, \\
0.71226922181679541960], [1000000, 0.73295955747289688572], [1000000\;10^{1/8}, \\
0.75361918599704501904], [1000000\;10^{1/4}, 0.77423674179795284738], [1000000\;10^{3/8}, \\
0.79479674439888286085], [1000000\sqrt{10}, 0.81527811177768272558], [1000000\;10^{5/8}, \\
0.83565214665766773305], [1000000\;10^{3/4}, 0.85587981219717724054], [1000000\;10^{7/8}, \\
0.87590805259206611712], [10000000, 0.89566483507192732198], [10000000\;10^{1/8}, \\
0.91505248907827308944], [10000000\;10^{1/4}, 0.93393879348395836732], \\
[10000000\;10^{3/8}, 0.95214511401867928820], [10000000\sqrt{10}, \\
0.96943072817627758867], [10000000\;10^{5/8}, 0.98547231603580407939], \\
[10000000\;10^{3/4}, 0.99983749311958777662], [10000000\;10^{7/8}, \\
1.0119513177809430390], [100000000, 1.0210551128989876292], [100000000\;10^{1/8}, \\
1.0261580412363961729], [100000000\;10^{1/4}, 1.0259842373827717706],
\end{gathered}
\tag{16}
$$

$[100000000\ 10^{3/8}, 1.01892281683846904 56], [100000000\sqrt{10},$
$1.00299599501316557 34], [100000000\ 10^{5/8}, 0.97587324749489888374],$
$[100000000\ 10^{3/4}, 0.93497764084634238330], [100000000\ 10^{7/8},$
$0.87775198120360530223], [1000000000, 0.80216755805907647490],$
$[1000000000\ 10^{1/8}, 0.70754233303888054285], [1000000000\ 10^{1/4},$
$0.59564227065243669188], [1000000000\ 10^{3/8}, 0.47181111489520263316],$
$[1000000000\sqrt{10}, 0.34550071019052611809], [1000000000\ 10^{5/8},$
$0.22923979536823646191], [1000000000\ 10^{3/4}, 0.13531405208743556980],$
$[1000000000\ 10^{7/8}, 0.07088117712734286 3784], [10000000000,$
$0.03452831828898648 3591], [10000000000\ 10^{1/8}, 0.01774189634528380 5345],$
$[10000000000\ 10^{1/4}, 0.01076520454679770 0902], [10000000000\ 10^{3/8},$
$0.00743446050353683 49385], [10000000000\sqrt{10}, 0.00537974306068139 64160],$
$[10000000000\ 10^{5/8}, 0.00394723867802395 15732], [10000000000\ 10^{3/4},$
$0.00291548547601105 13481], [10000000000\ 10^{7/8}, 0.00216268659223261 86692],$
$[100000000000, 0.00160903086638605 19085]]$

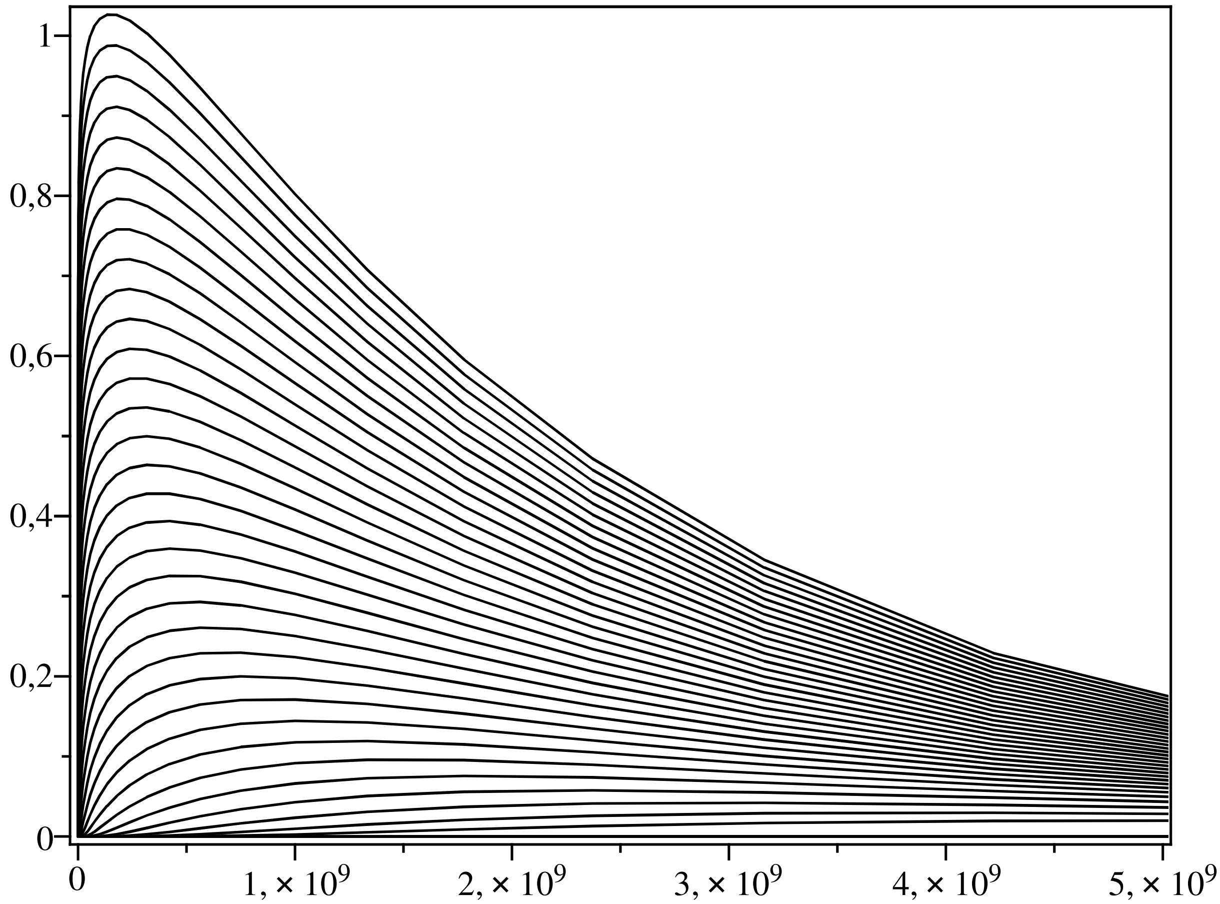
> *nops*(*plotfeld*[1]);

$$88 \tag{17}$$

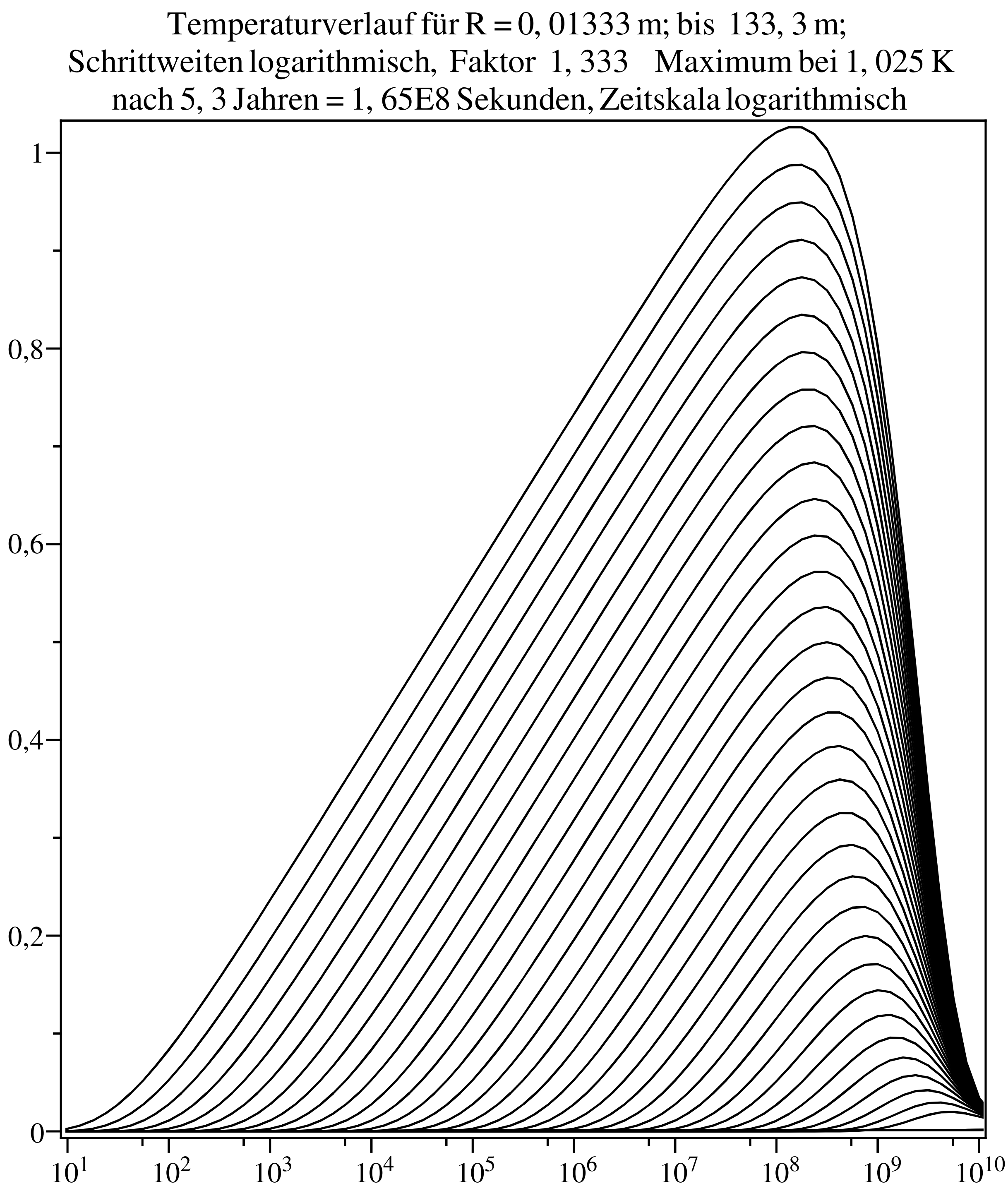
> *G* := [ ] :
for *NR* **from** 1 **to** 33 **by** 1 **do**
G := [*op*(*G*), *op*(*plotfeld*[*NR*])] :
end do:

> *listplot*(G);

Temperaturverlauf für R = 0, 01333 m; bis 133, 3 m;
Schrittweiten logarithmisch, Faktor 1, 333 Maximum bei 1, 025 K
nach 5, 3 Jahren = 1, 65E8 Sekunden, Zeitskala linear

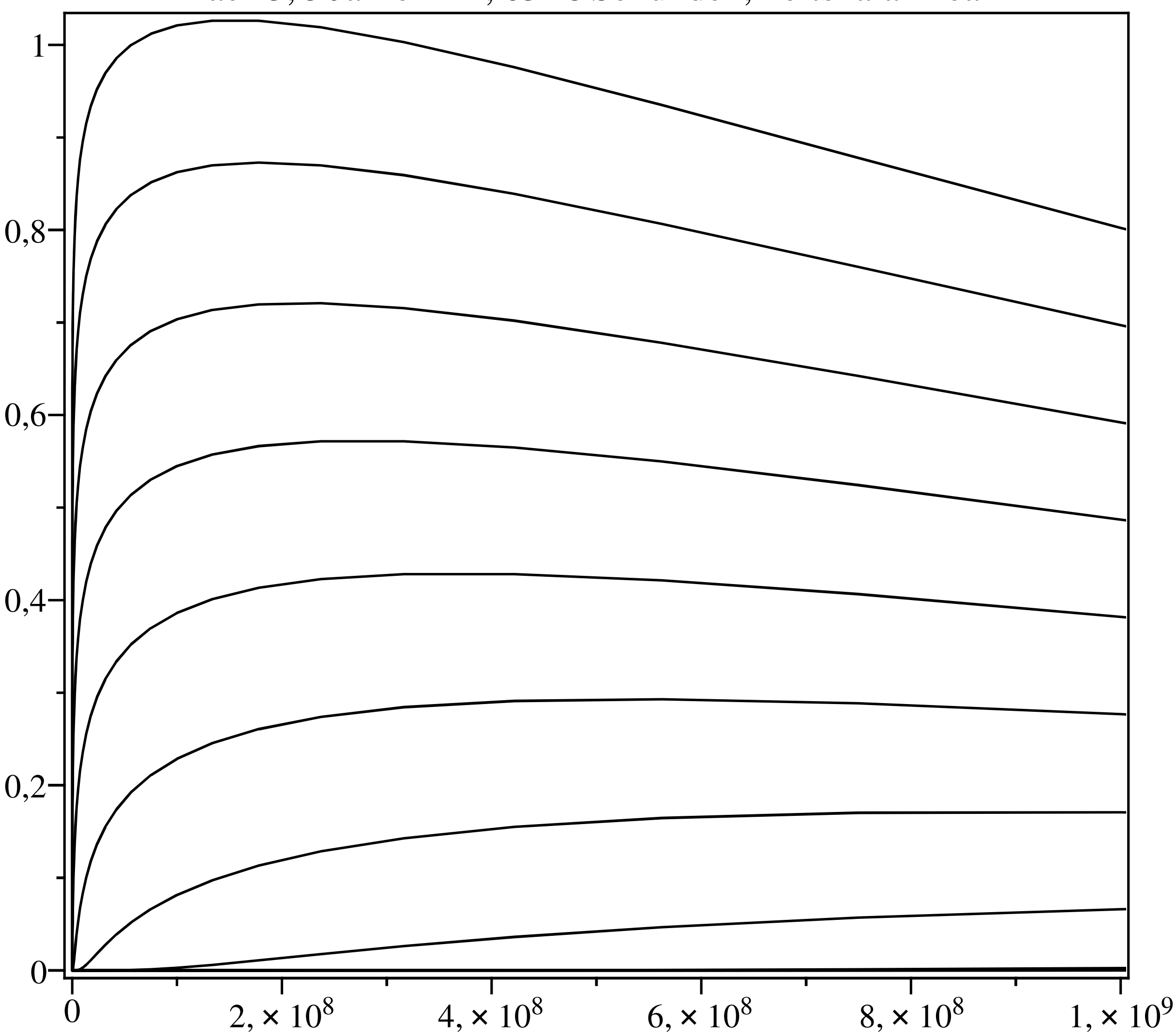


> *listplot*(G);



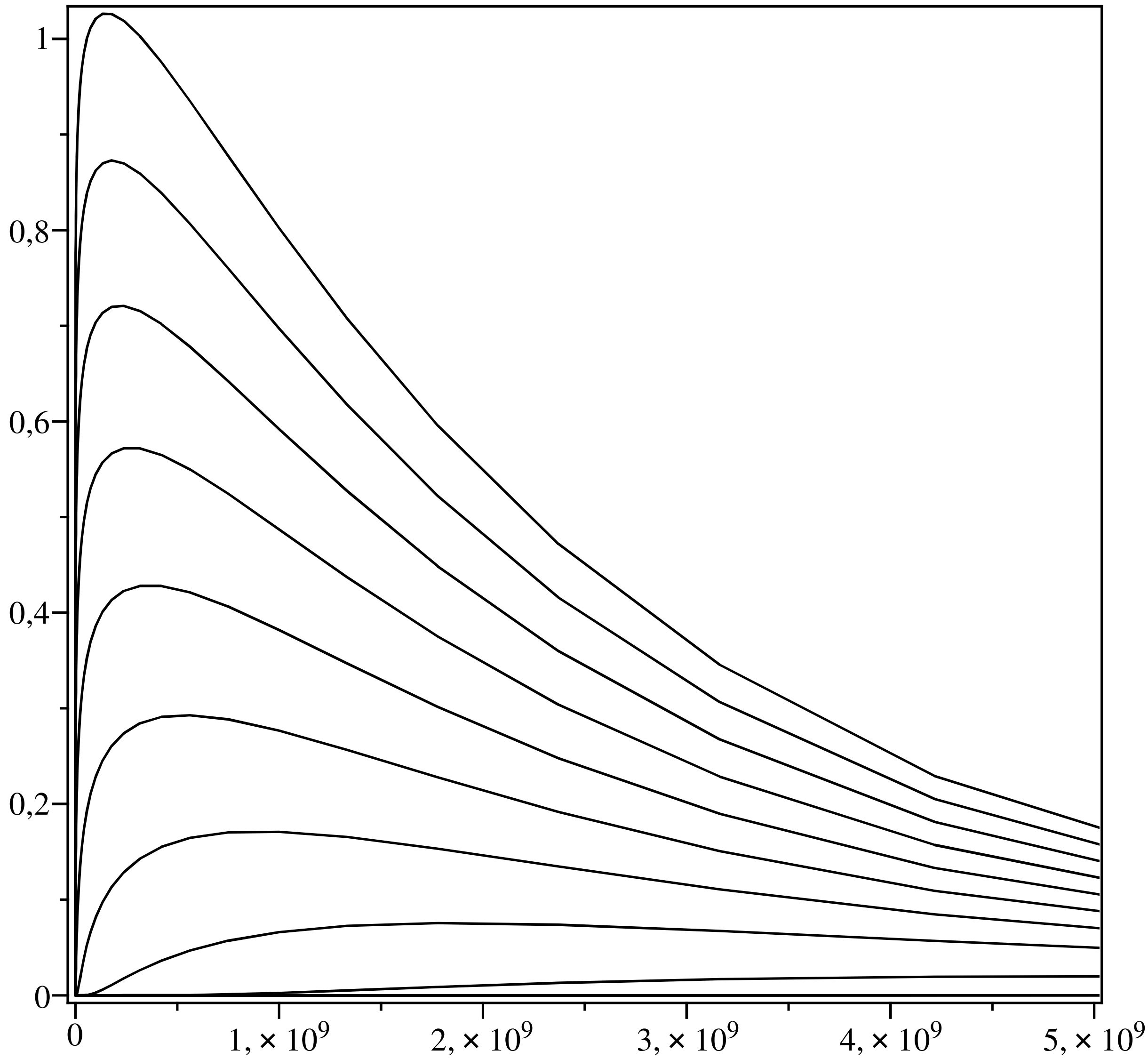

```
>
> G4 := [ ]:
  for NR from 1 to 33 by 4 do
  G4 := [op(G4), op(plotfeld[NR])]:
  end do:
> listplot(G4);
```

Temperaturverlauf für R = 0, 01333 m; bis 133, 3 m;
Schrittweiten logarithmisch, Faktor 3, 1622 Maximum bei 1, 025 K
nach 5, 3 Jahren = 1, 65E8 Sekunden, Zeitskala linear

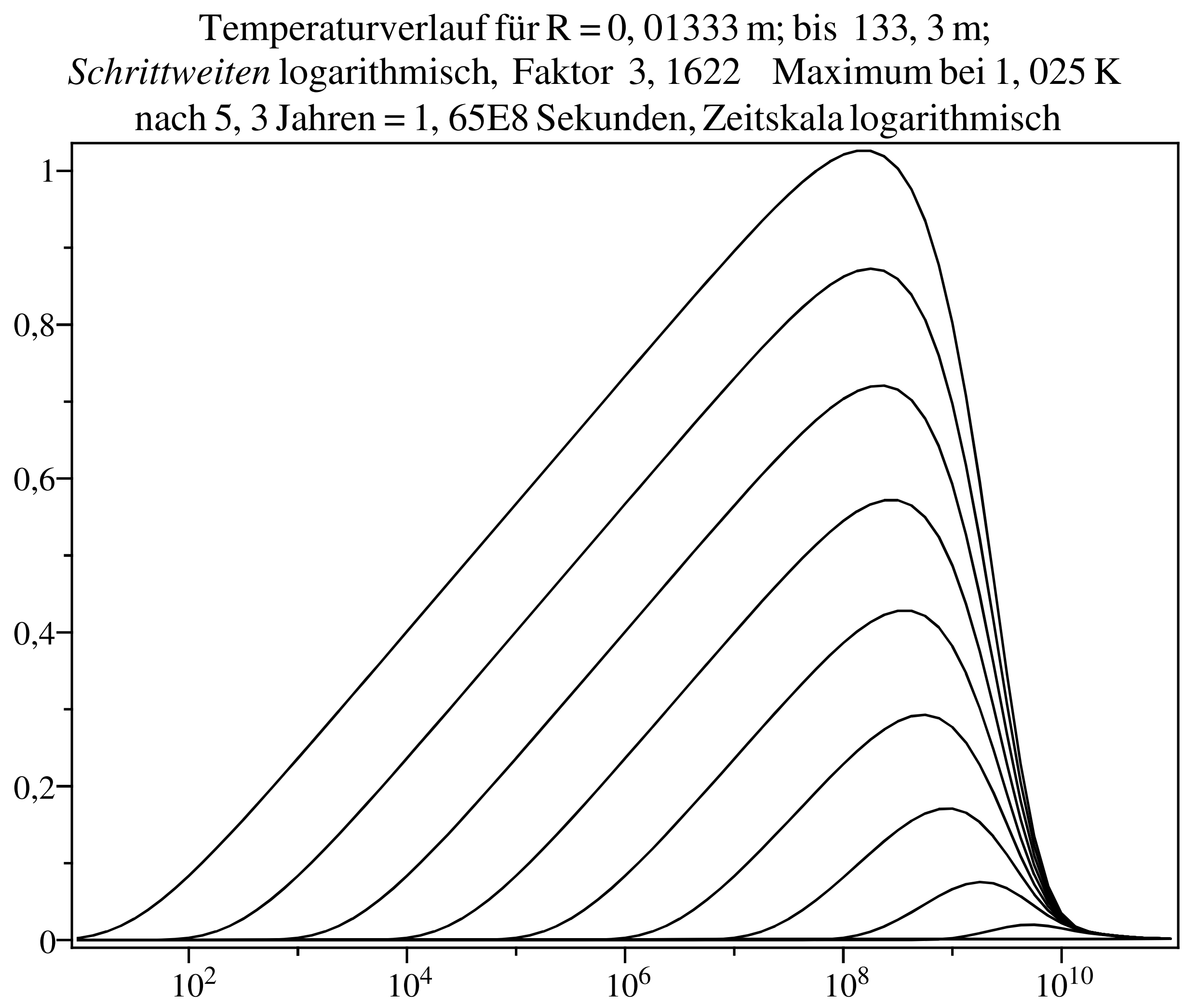


> *listplot*(G4);

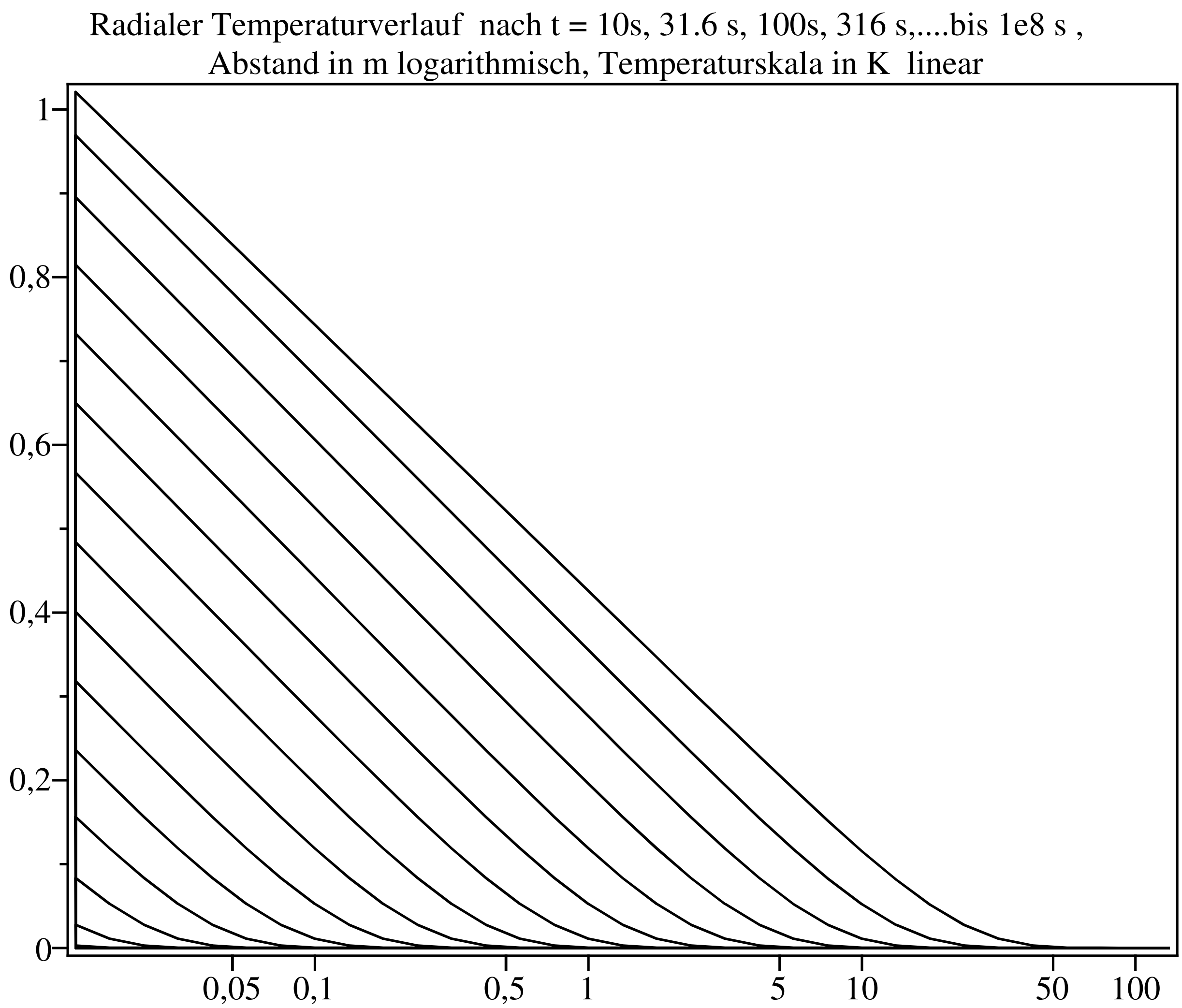
Temperaturverlauf für R = 0, 01333 m; bis 133, 3 m;
Schrittweiten logarithmisch, Faktor 3, 1622 Maximum bei 1, 025 K
nach 5, 3 Jahren = 1, 65E8 Sekunden, Zeitskala linear



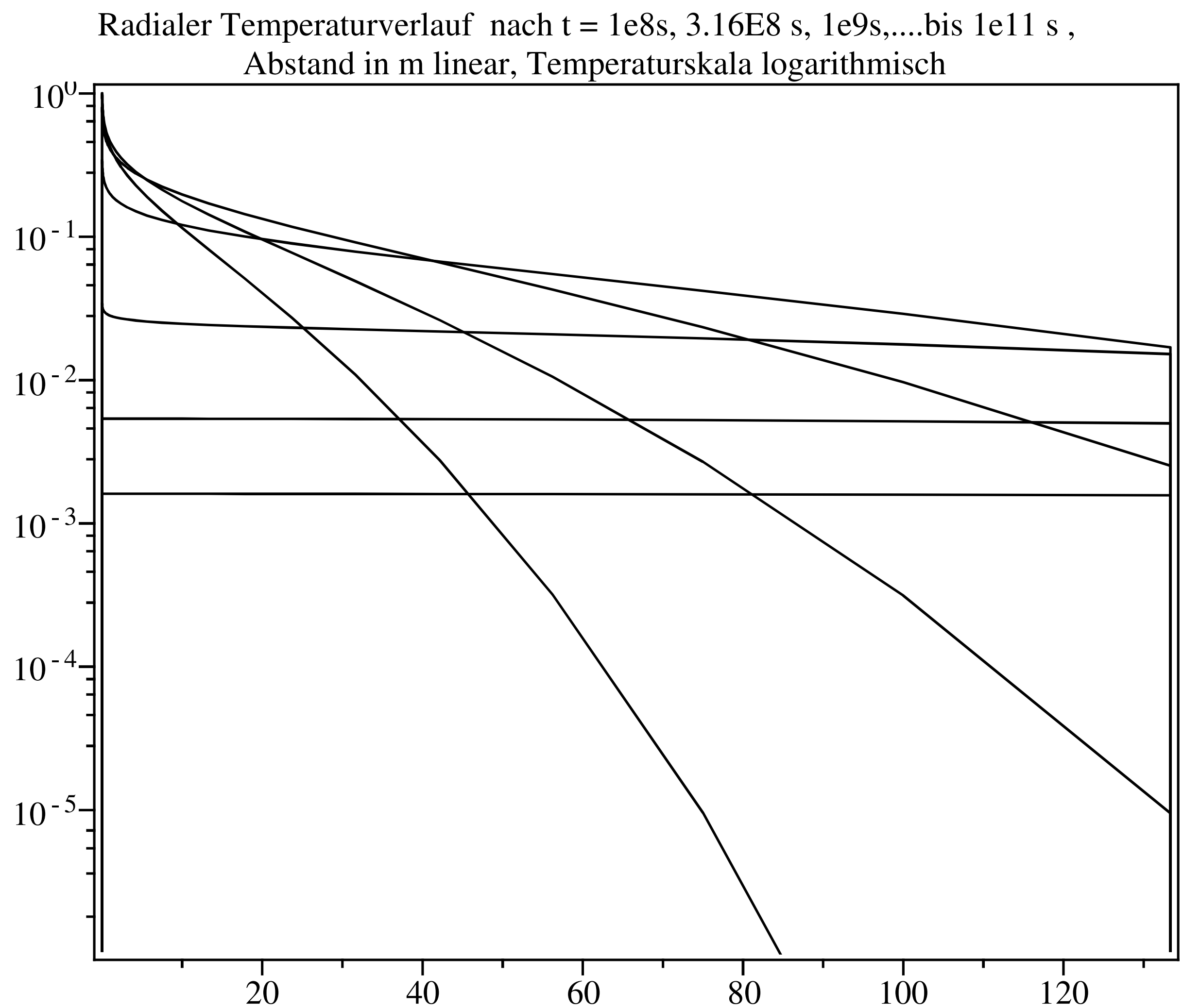
> *listplot*(G4);




```
> for k from 1 to 88 do
     plotfeldR[k] := [ ]:
     for NR from 1 to 33 do
        plotfeldR[k] := [op(plotfeldR[k]), [ListR[NR], Feld[NR, k]]]:
     end do:
  end do:
> H := [ ]:
  for k from 8 to 64 by 4 do
  H := [op(H), op(plotfeldR[k]), [ ListR[33], 0], [0.01336, 0]]:
  end do:
> listplot(H);
```




```
> Hend := [ ]:
  for k from 64 to 88 by 4 do
  Hend := [op(Hend), op(plotfeldR[k]), [ ListR[33], 0], [0, 0]] :
  end do:
> listplot(Hend);
```



Die 7 Linen gelten für Zeitpunkte von 1e8 s, 3,16e8 s, 1e9 s, usw. bis 1e11 s. Dabei sind die letzten 3 Linen sehr flach bei wenigen hunderstel bis tausendstel Grad Temperaturerhöhung.

Die Temperatur steigt anfangs nur langsam, wie an dem oberen Bild zu sehen ist. Sie erreicht nach 1e8 s nahe an der Linienquelle den höchsten Wert von 1,025 K

\>