

Wärmeleitung im mehrschaligen Zylinder

Gerhard Herres, 2026-06-29

Ein zylindrischer Behälter mit dem Innendurchmesser $D1 = 24$ mm enthält radioaktiven Müll, die Wand besteht aus 20 mm Edelstahl, Umhüllt ist der Behälter mit einem Strahlenschutz aus Blei der Wandstärke 35.5 mm, bis zum Stahlrohr des Bohrlochs ist ein Spalt von 24.1 mm Breite der mit Steinsalzgruss gefüllt wird. Das äußere Rohr ist 10 mm dicker Stahl.

Radialen der Anordnung :

HLW bis $R1 = 12$ mm, Edelstahl bis $R2 = 32$ mm, Blei bis $R3 = 67.5$ mm, Steinsalz bis 91.6 mm, Stahlrohr bis 101.6 mm

Wärmeleitfähigkeiten : HLW : (Uran)28; Edelstahl 15; Blei 35; Steinsalt 5.4; Stahl 50

Die Differentialgleichung der Wärmeleitung in zylindrischer Geometrie lautet:

$$\begin{aligned}
 &> EQ1 := \text{diff}(T(t, r, \phi, z), t) = a \cdot \left(\text{diff}(\text{diff}(T(t, r, \phi, z), r), r) + \frac{1}{r} \cdot \text{diff}(T(t, r, \phi, z), r) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \cdot \text{diff}(\text{diff}(T(t, r, \phi, z), \phi), \phi) + \text{diff}(\text{diff}(T(t, r, \phi, z), z), z) \right) + \frac{W}{\rho \cdot cp}; \\
 EQ1 &:= \frac{\partial}{\partial t} T(t, r, \phi, z) = a \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} T(t, r, \phi, z) + \frac{\frac{\partial}{\partial r} T(t, r, \phi, z)}{r} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} T(t, r, \phi, z)}{r^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial z^2} T(t, r, \phi, z) \right) + \frac{W}{\rho \cdot cp} \tag{1}
 \end{aligned}$$

Macht man die Näherung, dass die axiale und tangentielle Wärmeleitung vernachlässigbar ist und betrachtet nur den stationären Fall, so vereinfacht sich die Gleichung.

$$\begin{aligned}
 &> EQ2 := 0 = a \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} T(r) + \frac{\frac{\partial}{\partial r} T(r)}{r} \right) + \frac{W}{\rho \cdot cp}; \\
 EQ2 &:= 0 = a \left(\frac{d^2}{dr^2} T(r) + \frac{\frac{d}{dr} T(r)}{r} \right) + \frac{W}{\rho \cdot cp} \tag{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &> \text{dsolve}(EQ2, T(r)); \\
 T(r) &= -\frac{1}{4} \frac{Wr^2}{\rho \cdot cp \cdot a} + _C1 \ln(r) + _C2 \tag{3}
 \end{aligned}$$

Für den zentralen Bereich mit HLW darf die Temperatur nicht unendlich werden. Deshalb muss der Faktor $C1 = 0$ sein.

Die Bereiche mit größeren Radien enthalten keine Wärmequelle, so dass die Differentialgleichung lautet:

$$\begin{aligned} > EQ3 := 0 = a \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} T(r) + \frac{\frac{\partial}{\partial r} T(r)}{r} \right); \\ EQ3 := 0 = a \left(\frac{d^2}{dr^2} T(r) + \frac{\frac{d}{dr} T(r)}{r} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} > dsolve(EQ3, T(r)); \\ T(r) = _C1 + _C2 \ln(r) \end{aligned} \quad (5)$$

Für die Lösung aller Temperaturfunktionen benötigt man zusätzlich die Randbedingungen, dass an den Grenzen der Bereiche die Temperaturen der Bereiche gleich sein müssen und der Wärmestrom der von innen nach aussenfließt ebenfalls in beiden Bereichen gleich ist.

$$\begin{aligned} > T1(r) := -\frac{1}{4} \frac{W r^2}{\rho c p a} + C1 \ln(r) + C2; \\ T1 := r \rightarrow -\frac{1}{4} \frac{W r^2}{a \rho c p} + C1 \ln(r) + C2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} > T2(r) := C3 \ln(r) + C4; T3(r) := C5 \ln(r) + C6; T4(r) := C7 \ln(r) + C8; T5(r) \\ := C9 \ln(r) + C10; \\ T2 := r \rightarrow C3 \ln(r) + C4 \\ T3 := r \rightarrow C5 \ln(r) + C6 \\ T4 := r \rightarrow C7 \ln(r) + C8 \\ T5 := r \rightarrow C9 \ln(r) + C10 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} > Q1 := subs(r=r1, -2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda[1] \cdot r \cdot diff(T1(r), r) = Q0); \\ Q1 := -2 \pi L \lambda_1 r1 \left(-\frac{1}{2} \frac{r1 W}{\rho c p a} + \frac{C1}{r1} \right) = Q0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} > Q1a := subs(r=r1, -2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda[2] \cdot r \cdot diff(T2(r), r)); \\ Q1a := -2 \pi L \lambda_2 C3 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} > Q2i := subs(r=r2, -2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda[2] \cdot r \cdot diff(T2(r), r)); Q2a := subs(r=r2, -2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda[3] \cdot r \\ \cdot diff(T3(r), r)); \\ Q2i := -2 \pi L \lambda_2 C3 \\ Q2a := -2 \pi L \lambda_3 C5 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} > Q3i := subs(r=r3, -2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda[3] \cdot r \cdot diff(T3(r), r)); Q3a := subs(r=r3, -2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda[4] \cdot r \\ \cdot diff(T4(r), r)); \\ Q3i := -2 \pi L \lambda_3 C5 \\ Q3a := -2 \pi L \lambda_4 C7 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} > Q4i := subs(r=r4, -2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda[4] \cdot r \cdot diff(T4(r), r)); Q4a := subs(r=r4, -2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda[5] \cdot r \\ \cdot diff(T5(r), r)); \\ Q4i := -2 \pi L \lambda_4 C7 \\ Q4a := -2 \pi L \lambda_5 C9 \end{aligned} \quad (12)$$

> c7 := solve(Q4i = Q4a, C7);

$$c7 := \frac{\lambda_5 C9}{\lambda_4} \quad (13)$$

> c5 := solve(Q3i = Q3a, C5);

$$c5 := \frac{\lambda_4 C7}{\lambda_3} \quad (14)$$

> c3 := solve(Q2i = Q2a, C3);

$$c3 := \frac{\lambda_3 C5}{\lambda_2} \quad (15)$$

> c2 := solve(subs(C1 = 0, T1(r1)) = T2(r1), C2);

$$c2 := \frac{1}{4} \frac{4 C3 \ln(r1) a \rho cp + 4 C4 a \rho cp + W r I^2}{a \rho cp} \quad (16)$$

> C3 := c3; C5 := c5; C7 := c7;

$$C3 := \frac{\lambda_3 C5}{\lambda_2}$$
$$C5 := \frac{\lambda_4 C7}{\lambda_3}$$
$$C7 := \frac{\lambda_5 C9}{\lambda_4} \quad (17)$$

> C2 := expand(c2);

$$C2 := \frac{\lambda_5 C9 \ln(r1)}{\lambda_2} + C4 + \frac{1}{4} \frac{W r I^2}{a \rho cp} \quad (18)$$

> T2(r2) = T3(r2);

$$\frac{\lambda_5 C9 \ln(r2)}{\lambda_2} + C4 = \frac{\lambda_5 C9 \ln(r2)}{\lambda_3} + C6 \quad (19)$$

> c4 := solve(T2(r2) = T3(r2), C4);

$$c4 := \frac{\lambda_5 C9 \ln(r2) \lambda_2 + C6 \lambda_3 \lambda_2 - \lambda_5 C9 \ln(r2) \lambda_3}{\lambda_3 \lambda_2} \quad (20)$$

> T3(r3) = T4(r3);

$$\frac{\lambda_5 C9 \ln(r3)}{\lambda_3} + C6 = \frac{\lambda_5 C9 \ln(r3)}{\lambda_4} + C8 \quad (21)$$

> c6 := solve(%, C6);

$$c6 := \frac{\lambda_5 C9 \ln(r3) \lambda_3 + C8 \lambda_4 \lambda_3 - \lambda_5 C9 \ln(r3) \lambda_4}{\lambda_4 \lambda_3} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} > T4(r4) = T5(r4); \\ & \frac{\lambda_5 C9 \ln(r4)}{\lambda_4} + C8 = C9 \ln(r4) + C10 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} > c8 := solve(%, C8); \\ c8 := \frac{C9 \ln(r4) \lambda_4 + C10 \lambda_4 - \lambda_5 C9 \ln(r4)}{\lambda_4} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} > C8 := expand(c8); \\ C8 := C9 \ln(r4) + C10 - \frac{\lambda_5 C9 \ln(r4)}{\lambda_4} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} > C6 := expand(c6); \\ C6 := \frac{\lambda_5 C9 \ln(r3)}{\lambda_4} + C9 \ln(r4) + C10 - \frac{\lambda_5 C9 \ln(r4)}{\lambda_4} - \frac{\lambda_5 C9 \ln(r3)}{\lambda_3} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} > C4 := expand(c4); \\ C4 := \frac{\lambda_5 C9 \ln(r2)}{\lambda_3} + \frac{\lambda_5 C9 \ln(r3)}{\lambda_4} + C9 \ln(r4) + C10 - \frac{\lambda_5 C9 \ln(r4)}{\lambda_4} - \frac{\lambda_5 C9 \ln(r3)}{\lambda_3} \\ - \frac{\lambda_5 C9 \ln(r2)}{\lambda_2} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} > C2 := expand(c2); \\ C2 := \frac{\lambda_5 C9 \ln(r1)}{\lambda_2} + \frac{\lambda_5 C9 \ln(r2)}{\lambda_3} + \frac{\lambda_5 C9 \ln(r3)}{\lambda_4} + C9 \ln(r4) + C10 - \frac{\lambda_5 C9 \ln(r4)}{\lambda_4} \\ - \frac{\lambda_5 C9 \ln(r3)}{\lambda_3} - \frac{\lambda_5 C9 \ln(r2)}{\lambda_2} + \frac{1}{4} \frac{WrI^2}{a \rho cp} \end{aligned} \quad (28)$$

>
HLW bis R1 = 12 mm, Edelstahl bis R2 = 32 mm, Blei bis R3 = 67.5 mm, Steinsalz bis 91.6 mm,
Stahlrohr bis 101.6 mm

Wärmeleitfähigkeiten : HLW : (Uran)28; Edelstahl 15; Blei 35; Steinsalt 5.4; Stahl 50

$$\begin{aligned} > r1 := 0.012; r2 := 0.032; r3 := 0.0675; r4 := 0.0916; r5 := 0.1016; \\ & r1 := 0.012 \\ & r2 := 0.032 \\ & r3 := 0.0675 \\ & r4 := 0.0916 \\ & r5 := 0.1016 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} > \lambda[1] := 28; \lambda[2] := 15; \lambda[3] := 35; \lambda[4] := 5.4; \lambda[5] := 50; \\ & \lambda_1 := 28 \\ & \lambda_2 := 15 \\ & \lambda_3 := 35 \end{aligned}$$

$$\lambda_4 := 5.4$$

$$\lambda_5 := 50 \quad (30)$$

$$\begin{aligned} > C8; \\ & 19.74230568 C9 + C10 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} > C7; \\ & 9.259259259 C9 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} > C6; \\ & -1.366313187 C9 + C10 \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} > C5; \\ & 1.428571429 C9 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} > C4; \\ & 5.18991419 C9 + C10 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} > C3; \\ & 3.333333335 C9 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} > C2; \\ & -9.552914567 C9 + C10 + \frac{0.00003600000000 W}{\rho cp a} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} > a := \frac{\lambda[1]}{\rho \cdot cp}; \end{aligned}$$

$$a := \frac{28}{\rho cp} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} > C2; \\ & -9.552914567 C9 + C10 + 0.000001285714286 W \end{aligned} \quad (39)$$

Die Wärmeleitung im Salz ist nicht so schnell wie im Metall. Nach $t=1e8$ Sekunden war nach der Berechnung der instationären Wärmeleitung ein Maximum von $T=3.08$ K erreicht. Der Wärmestrom beträgt dann $Q=Q0 \cdot \exp(-b \cdot t)$ mit $b=4.588E-10$. Da die Füllhöhe im Endlagerbehälter nur 0.110 m beträgt und die darunter und darüber befindlichen Metallteile keine Wärmequelle enthalten, rechne ich mit der aktiven Länge $L=0.110$ m. Die Wärmestromdichte ist $W=Q/\text{Vol}$.

$$\begin{aligned} > Q0t := 4.31 \cdot \exp(-4.588e-10 \cdot 1e8); \\ & Q0t := 4.116724834 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} > Q5i := \text{subs}(r=r5, -2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda[5] \cdot r \cdot \text{diff}(T5(r), r)); \\ & Q5i := -100 \pi L C9 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} > c9 := \text{solve}(\text{subs}(L=0.11, Q5i) = Q0t); \\ & c9 := -0.1191267467 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} > C9 := c9; \\ & C9 := -0.1191267467 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} > W := \frac{Q0t}{(\pi \cdot 0.012^2 \cdot 0.11)}; \\ & W := \frac{2.598942446 \cdot 10^5}{\pi} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} > C2 := \text{subs}(C9 = c9, C2); \end{aligned}$$

$$C2 := 3.945599103 + \frac{0.3341497430}{\pi} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} > T5a := \text{subs}(r=r5, T5(r)); \\ T5a := -0.1191267467 \ln(0.1016) + 2.807591469 \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} > c10 := \text{solve}(\text{subs}(C9=c9, T5a) = 3.08); \\ c10 := \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} > C10 \\ 2.807591469 \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} > C9; C8; C7; C6; C5; C4; C3; \text{evalf}(C2); C1 := 0; \\ -0.1191267467 \\ 0.455754822 \\ -1.103025432 \\ 2.970355915 \\ -0.1701810667 \\ 2.189333875 \\ -0.3970891556 \\ 4.051962270 \\ C1 := 0 \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} > Tges := \text{piecewise}(r < r1, T1(r), r1 < r < r2, T2(r), r2 < r < r3, T3(r), r3 < r < r4, T4(r), \\ r4 < r < r5, T5(r)); \\ Tges := \end{aligned} \quad (50)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{2320.484327 r^2}{\pi} + 3.945599103 + \frac{0.3341497430}{\pi} & r < 0.012 \\ -0.3970891556 \ln(r) + 2.189333875 & 0.012 < r \text{ and } r < 0.032 \\ -0.1701810667 \ln(r) + 2.970355915 & 0.032 < r \text{ and } r < 0.0675 \\ -1.103025432 \ln(r) + 0.455754822 & 0.0675 < r \text{ and } r < 0.0916 \\ -0.1191267467 \ln(r) + 2.807591469 & 0.0916 < r \text{ and } r < 0.1016 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} > Tgrenz := [[0.012, 4], [0.012, 0], [0.032, 0], [0.032, 4], [0.032, 0], [0.0675, 0], [0.0675, \\ 4], [0.0675, 0], [0.0916, 0], [0.0916, 4]]; \\ Tgrenz := [[0.012, 4], [0.012, 0], [0.032, 0], [0.032, 4], [0.032, 0], [0.0675, 0], [0.0675, 4], \\ [0.0675, 0], [0.0916, 0], [0.0916, 4]] \end{aligned} \quad (51)$$

$$> \text{plot}(\{Tges, Tgrenz\}, r=0..r5);$$

